GROUPE CONCOURS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE AU CONCOURS PH-P

SESSION 1994

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée dans le cadre des dispositions de la circulaire 86.228 du 28 juillet 1986.

Préambule

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés des solutions de certaines équations différentielles du second ordre, du type : $R(x)y'' + R'(x)y' - G(x)y = 0$.

Après une introduction et des résultats généraux (parties I et II) on étudie dans la partie III des résultats concernant les nombres λ pour lesquels il existe une solution non nulle de l'équation : $R(x)y'' + R'(x)y' - \lambda y = 0$ vérifiant de plus certaines conditions.

On rappelle le résultat suivant (théorème de Cauchy) :
soient $\mathcal{I}$ un intervalle d' intérieur non vide, A, B, C trois fonctions continues sur $\mathcal{I}$ à valeurs réelles ; si α et α' sont deux nombres réels et x_0 un élément de $\mathcal{I}$ alors l'équation différentielle $y'' + A(x)y' + B(x)y = C(x)$
admet une solution unique f définie sur $\mathcal{I}$, telle que $f(x_0) = \alpha$ et $f'(x_0) = \alpha'$.

Notations et définitions générales

Dans tout ce problème, on considère un intervalle I d'intérieur non vide, une fonction R de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeurs réelles, et une fonction G continue sur I, à valeurs réelles.
On note R' la dérivée de R et E(R, G) l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$E(R, G) : \qquad R(x)y'' + R'(x)y' - G(x)y = 0$$

dans laquelle y' et y" désignent respectivement les dérivées première et seconde de l'application inconnue y de I dans $\mathbb{R}$.

Si J est un intervalle d'intérieur non vide contenu dans I, on désigne par $\mathcal{S}_J(R, G)$ ou simplement $\mathcal{S}_J$ l'ensemble des applications de J dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de E(R, G) sur l'intervalle J ; enfin si s et t désignent deux éléments de $\mathcal{S}_J$, on note $W_{s,t}$ la fonction définie sur J par $W_{s,t}(x) = s(x)t'(x) - s'(x)t(x)$.

Préliminaire

On suppose que R(x) est différent de zéro pour tout x appartenant à J et on considère un élément x_0 de J.

P1 - Montrer brièvement, en utilisant le théorème de Cauchy, que l'application de $\mathcal{S}_J$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à tout s appartenant à $\mathcal{S}_J$ fait correspondre le couple $(s(x_0), s'(x_0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

P2 - En déduire que si s et t appartiennent à $\mathcal{S}_J$, alors s et t sont linéairement indépendantes si et seulement si $W_{s,t}(x_0) \neq 0$.

PARTIE I

Dans cette partie on suppose que 0 est un point intérieur à l'intervalle I.

1.1 On suppose dans cette question : $R(x) = x^p$ (avec p entier strictement positif) et $G(x) = \lambda$ (avec λ réel quelconque).

1.1.1 On suppose que $\lambda = 0$. Déterminer l'ensemble des solutions de $E(x^p, 0)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (respectivement sur $\mathbb{R}$) (c'est-à-dire les ensembles $\mathcal{S}_{]0,+\infty[}$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$).

1.1.2 On considère l'équation $E(x^2, 12)$:

$$E(x^2, 12) : \qquad x^2 y'' + 2 x y' - 12y = 0.$$

1.1.2.1 Vérifier que $E(x^2, 12)$ admet comme solution sur $\mathbb{R}$ une fonction polynôme Y_0 telle que $Y_0(1) = 1$, fonction que l'on explicitera.

1.1.2.2 En posant $y = Y_0 Z$ déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_{]0,+\infty[}$. Préciser l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$.

1.1.2.3 Expliciter les solutions g_j de $E(x^2, 12)$ sur $]0, +\infty[$ correspondant aux conditions initiales suivantes :

$$g_1\begin{cases} g_1(1)=0 \\ g_1'(1)=-2 \end{cases} \quad ; \quad g_2\begin{cases} g_2(1)=1 \\ g_2'(1)=-4 \end{cases} \quad ; \quad g_3\begin{cases} g_3(1)=-1 \\ g_3'(1)=-3 \end{cases}$$

et représenter leur graphe respectif relativement à un même repère (on précisera la position relative de ces graphes).

1.1.3 On considère l'équation E(x, λ) avec $\lambda \neq 0$

$$E(x, \lambda) : \qquad xy'' + y' - \lambda y = 0$$

1.1.3.1 Montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, l'équation E(x, λ) admet une solution unique h_λ développable en série entière de la variable x et telle que $h_\lambda(0) = 1$.

On explicitera le terme général et le rayon de convergence de cette série entière.

On considère le cas particulier $\lambda = -1$ et la fonction h_{-1} que l'on notera h pour simplifier.

1.1.3.2 Déterminer le signe de h(1) (resp. de h(2)).

1.1.3.3 La fonction h est-elle strictement monotone sur l'intervalle [0,2] ?

1.1.3.4 Quel est le nombre de solutions de l'équation h(x) = 0 sur l'intervalle]0, 2] ?

1.1.4 On suppose, dans cette question, que $\lambda \neq 0$ et $p \geq 2$, et on considère l'équation

$$E(x^p, \lambda) : \qquad x^p y'' + p x^{p-1} y' - \lambda y = 0.$$

Discuter, dans les deux cas suivants, l'existence d'une solution non identiquement nulle de $E(x^p, \lambda)$ et qui soit développable en série entière de la variable réelle x :

1.1.4.1 lorsque p = 2 ;

1.1.4.2 lorsque p > 2 .

1.2 Considérant à nouveau l'équation E(R, G), R et G désignant respectivement une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et une fonction continue sur l'intervalle I, on suppose que R(0) = 0 et $R(x) \neq 0$ pour tout x non nul de I. Soit β un réel strictement positif de I ; on considère deux éléments s et t de l'espace vectoriel $\mathscr{S}_{[0,\beta[}(R, G)$.

1.2.1 Calculer la dérivée de la fonction H définie sur $[0,\beta[$ par :

$$H(x) = R(x)\, W_{s,t}(x)$$

1.2.2 En utilisant les restrictions de s et t à l'intervalle $]0, \beta[$ montrer que s et t sont linéairement dépendants dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{[0,\beta[}(R, G)$.

1.3 On suppose dans cette question :

$$R(x) = x^4 \text{ et } G(x) = -2x^2$$

1.3.1 Déterminer les fonctions puissances : $x \mapsto x^\theta$ (avec θ réel) appartenant à $\mathcal{S}_{]0,+\infty[}$.

1.3.2 Déterminer les ensembles $\mathcal{S}_{]0,+\infty[}$ et $\mathcal{S}_{\mathbf{R}}$.

PARTIE II

On suppose dans cette partie que I = [a, b] , avec a et b réels, a < b, et que la fonction R est strictement positive sur l'intervalle I. On appelle "zéro" d'une fonction une valeur de la variable pour laquelle la fonction prend la valeur zéro.
L'objet de cette partie est d'étudier certaines propriétés des zéros de deux solutions linéairement indépendantes de E(R, G).

2.1 Soit f une solution de E(R, G) sur I. On suppose que f admet une infinité de zéros dans I.

2.1.1 Montrer qu'il existe dans [a, b] une suite convergente (z_n) de zéros de f, telle que si z désigne la limite de la suite on ait : $z_n \neq z$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2.1.2 Quelle est la valeur de f (z) (respectivement de f '(z)) ?

2.1.3 En déduire que f est la fonction nulle.

Il résulte de **2.1** que toute solution non identiquement nulle f de E(R, G) admet un nombre fini de zéros dans l'intervalle [a, b], nombre que l'on note N (f).

2.2 Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathscr{S}_{[a,\ b]}(R,\ G)$; on suppose que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes.
On considère deux zéros consécutifs x_1 et x_2 de f_1 sur [a, b] avec $x_1 < x_2$ (par suite f_1 n'a pas de zéro dans l'intervalle $]x_1,\ x_2[$). On se propose, en utilisant la fonction W_{f_1,f_2}, de montrer que f_2 a au moins un zéro dans $]x_1,\ x_2[$.

2.2.1 La fonction f_2 peut-elle être nulle en x_1 ou en x_2 ?

2.2.2 On suppose, par l'absurde, que f_2 n'a pas de zéro dans $]x_1,\ x_2[$ et l'on considère la fonction φ définie sur $[x_1,\ x_2]$ par $\varphi(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$.

En utilisant la fonction φ et sa dérivée, montrer qu'alors les fonctions f_1 et f_2 seraient linéairement dépendantes.

2.2.3 Combien la fonction f_2 a-t-elle de zéros dans $]x_1,\ x_2[$?

2.2.4 Quelles valeurs peut prendre l'entier $|N(f_1) - N(f_2)|$?

2.2.5 On suppose que $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 2$

2.2.5.1 Quelle est la valeur de N (h) , où h désigne la fonction définie au **1.1.3.1** ?

2.2.5.2 Quelle est , pour $i \neq j$, la valeur de $|N(g_i) - N(g_j)|$ où g_i (resp. g_j) désigne une des fonctions définies au **1.1.2.3** ?

PARTIE III

Dans cette partie on considère deux nombres réels a et b avec $a < b$ et une fonction R de classe $\mathscr{C}^1$ sur [a, b] à valeurs réelles strictement positives sur [a, b]. Si m est un entier naturel, on désigne par $\mathscr{C}^m([a, b], K)$ le K-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^m$ de [a, b] dans K (où K désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$).
On note $\mathscr{L}$ l'application linéaire de $\mathscr{C}^2([a, b], K)$ dans $\mathscr{C}^0([a, b], K)$ définie par

$$\mathscr{L} : \quad y \mapsto R\,y'' + R'\,y'$$

On désigne par E_K le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2([a, b], K)$ formé des fonctions f telles que $f(a) = f(b) = 0$. Soit λ un nombre complexe ; s'il existe dans $E_{\mathbb{C}}$ une fonction y, autre que la fonction nulle, telle que

$$\mathscr{L}(y) = \lambda y$$

on dit que λ est une "valeur propre" de $\mathscr{L}$ et que y est une "fonction propre" associée à λ . On note $Sp(\mathscr{L})$ l'ensemble des "valeurs propres " de $\mathscr{L}$.

Si u et v sont deux éléments de $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{C})$,
on pose

$$< u, v > = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

3.1 On considère deux éléments y et z de $E_{\mathbb{C}}$.
Quelle est la valeur de la différence

$$< \mathscr{L}(y), z > - < y, \mathscr{L}(z) > ?$$

3.2 On suppose que $\mathscr{L}$ possède deux "valeurs propres" distinctes λ_1 et λ_2. Soit y_1 (resp. y_2) une "fonction propre" associée à λ_1 (resp. λ_2). Quelle est la valeur de $< y_1, y_2 >$?

3.3 Montrer que l'ensemble $Sp(\mathscr{L})$ est inclus dans $\mathbb{R}$.

3.4 Déterminer l'ensemble $Sp(\mathscr{L})$, et pour chaque λ appartenant à $Sp(\mathscr{L})$, l'ensemble des "fonctions propres" associées à λ dans les deux cas suivants :

3.4.1 lorsque $[a, b] = [0, 2\pi]$ et $R = 1$ (c'est-à-dire pour tout x dans $[0, 2\pi]$: $R(x) = 1$)

3.4.2 lorsque $[a, b] = [1, e^{2\pi}]$ et $R(x) = x^2$
(On pourra effectuer le changement de variable défini par $x = e^t$).

FIN